Квантни ансамбли и стања

- Појам ансамбла: скуп од N идентичних* копија система (макроскопски, лабораторијски идентичних) које међусобно не интерагују
  ↑
  разрешава појам почетних услова.

  *фраза "по нечему идентичних"

- Ансамбли < просторног / временског типа

Ансамбли < чисти / мешани

- Придруживање стање ⇄ ансамбл

обави се симултано, предиктивно мерење из неког ПСКО-а и добијени ансамбл се налази у једнозначно одређеном чистом стању $|\psi\rangle$

- Мешањем чистих ансамбала добија се мешани ансамбл:

$$S = \cup_i S_i \longleftrightarrow \hat{\rho}$$

статистички оператор $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, $S : (p_i, |\psi_i\rangle)$

мешано стање

$p_i \geq 0, \forall i$

- Вероватноће мерења

$$w(\hat A, a_n, \hat\rho) = tr(\hat\rho \hat P_n)$$

$$\hat A = \sum_n a_n \hat P_n$$

- Очекивана вредност

$$\langle \hat A \rangle = tr\, \hat A \hat\rho \equiv tr\, \hat\rho \hat A$$

- Критеријум за чисто стање

$$\hat\rho^2 = \hat\rho$$

- J-на кретања за мешана стања (Лиовилова ј-на)

$$\frac{d\hat\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat H, \hat\rho]$$

- особине $\hat\rho$ (као оператора)

$$\langle \phi | \hat\rho | \phi \rangle \geq 0 \quad (\text{произвољно } |\phi\rangle)$$

$$tr\, \hat\rho = 1$$

- терминологија за $\hat\rho$
  - статистички оператор
  - мешано стање
  - матрица густине

Напомена:

Може се тицати и мешавине неортогоналних стања (својствена стања некомутирајућих опсервабли)

1. Показати да је статистички оператор

а) Ермитски

б) у оптштем случају, не-унитарни

А онда да су дијагонални елементи матрице густине једнаки вероватноћама да физички систем буде у стањима од којих је изграђен оператор.

а)

$$\hat{\rho}^{+} = \hat{\rho}$$

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad , \quad \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$$

p_i ↓ реални, не-негативни бројеви

$$\hat{\rho}^{+} = \sum_i (p_i)^{*} \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = \hat{\rho}$$

б)

$$\hat{\rho}^{+} = \hat{\rho}^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\rho}^{+} &= \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \\ \hat{\rho}^{-1} &= \sum_i p_i^{-1} \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; p_i^2 = 1, \forall i$$

што није испуњено у општем случају.

в)

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

Дијагонални елементи матрице

$$\langle \psi_j | \hat{\rho} | \psi_j \rangle = \sum_i \rho_i \langle \psi_j | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle$$

$$= \rho_j$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \psi_j | \hat{\rho}^+ | \psi_j \rangle = \rho_j^*$$

$$\rho_j = \langle \psi_j | \hat{\rho} | \psi_j \rangle$$

ово по аналогији са селективним предиктивним мерењем!

$$W(\hat{A}, \hat{\rho}, a_i) = \langle a_i | \hat{\rho} | a_i \rangle$$

Радна претпоставка задатка!

$\hat{\rho}$ је мешавина ортогоналних стања.

2. Показати да за чисто стање $|\psi_0\rangle$, не постоји декомпозиција

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

његовог статистичког оператора, тј. у таквој декомпозицији $p_i = 1$, $\forall i$.

Нека је $\hat{\rho}_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$

Претпоставимо да се може писати

$$\hat{\rho}_0 = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \Rightarrow$$

$$\hat{\rho}_0^2 = \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

$$= \sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

Али, важи за чисто стање

$$\sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \Rightarrow$$

$$\sum_i (p_i^2 - p_i) |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = 0 \Rightarrow$$

$$p_i^2 - p_i = 0 \Rightarrow p_i(p_i - 1) = 0$$

$p_i = 0$, $\forall i$ (није физички прихватљиво решење)

$p_i = 1$, $\forall i$

3. Показати да за статистички оператор $\hat{\rho}$ важи $tr(\hat{\rho}^2) \leq 1$, при чему је једнакост испуњена акко је $\hat{\rho}$ чисто стање.

$\hat{\rho}$ је чисто стање, потребан услов

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| , \quad \langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$$

$$\hat{\rho}^2 = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

$$= \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$$

$$= \sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

$$tr\,\hat{\rho}^2 = \langle\psi_k| \sum_i p_i^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_k\rangle$$

$$= p_k^2 < 1 \quad \text{јер} \quad \sum_k p_k = 1$$

$$tr\,\hat{\rho}^2 = 1 \Leftrightarrow p_k = 1 \Rightarrow \quad \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| , \text{ чисто стање}$$

$\hat{\rho}$ је чисто стање, довољан услов

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow tr|\psi\rangle\langle\psi| = \sum_i \langle i|\psi\rangle\langle\psi|i\rangle$$

$$= \langle\psi|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle + \cancel{\sum_{i\neq\psi} \langle i|\psi\rangle\langle\psi|i\rangle}^{0}$$

$$= 1$$

4. Показати да је очекивана вредност опсервабле $\hat{X}$ на ансамблу у стању $\hat{\rho}$ дата изразом

$$\langle \hat{X} \rangle = tr(\hat{\rho}\hat{X}).$$

За чисто стање $|\psi\rangle$

$$\langle \hat{X} \rangle = \langle \psi | \hat{X} | \psi \rangle$$

Ако је у питању мешавина $\{p_j, |\psi_j\rangle\}$, онда, по аналогији,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{X} \rangle &= \sum_j p_j \langle \psi_j | \hat{X} | \psi_j \rangle \\
&= \sum_j p_j \, tr\, |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \hat{X} \\
&= tr\left(\sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \hat{X} \right) \\
&= tr(\hat{\rho}\hat{X}) = tr(\hat{X}\hat{\rho})
\end{aligned}$$

Користи се тврђење

$$tr\, |\psi\rangle\langle\psi|\hat{X} = \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle$$

Л.С.

$$\begin{aligned}
tr\, |\psi\rangle\langle\psi|\hat{X} &\hat{=} \sum_i \langle i|\psi\rangle\langle\psi|\hat{X}|i\rangle \\
&= \cancel{\langle\psi|\psi\rangle}^{1} \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle + \sum_{i\neq\psi} \cancel{\langle i|\psi\rangle}^{0} \langle\psi|\hat{X}|i\rangle \\
&= \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle
\end{aligned}$$

5. Користећи Шредингерову ј-ну показати да важи

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}]$$

где је $\hat{H}$ Хамилтонијан система. Показати да је интегрални вид закона кретања, односно еволуције статистичког оператора

$$\hat{\rho}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\hat{\rho}(0)\,e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

$\hat{H} \neq \hat{H}(t)$

Приметити, у овом ~~случају~~ задатку $\Rightarrow$

Ш. једначина

$$i\hbar \frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t)\,|\psi(t)\rangle$$

односно

$$i\hbar \frac{\partial|\psi_i(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t)\,|\psi_i(t)\rangle,$$

Адјунговањем

$$-i\hbar \frac{\partial\langle\psi_i(t)|}{\partial t} = \hat{H}(t)\,\langle\psi_i(t)|$$

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i p_i\,|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|$$

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \sum_i p_i\left(\frac{\partial|\psi_i(t)\rangle}{\partial t}\langle\psi_i(t)| + |\psi_i(t)\rangle\frac{\partial\langle\psi_i(t)|}{\partial t}\right)$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\sum_i p_i \left(\hat{H}(t)|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| - |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|\hat{H}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left(\hat{H}(t)\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{H}(t)\right)$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)\right]$$

Опет полазимо од закона кретања за чисто стање, у интегралном облику

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

Прецизније $\hat{U}(t-t_0)$

односно

$$|\psi_i(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)|\psi_i(t_0)\rangle$$

$$|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| = \hat{U}(t,t_0)|\psi_i(t_0)\rangle\langle\psi_i(t_0)|\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)$$

Сумирамо

$$\sum_i p_i|\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| = \sum_i p_i \hat{U}(t,t_0)|\psi_i(t_0)\rangle\langle\psi_i(t_0)|\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)$$

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t,t_0)\,\hat{\rho}(t_0)\,\hat{U}^{\dagger}(t,t_0)$$

6. Користећи ј-ну кретања за статистички оператор, показати да чисто стање не еволуира спонтано у мешано стање.

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)\right]$$

за чисто стање важи $tr\,\hat{\rho}^2(t_0) = 1$

$$\frac{d\, tr\,\hat{\rho}^2(t)}{dt} = tr\,\frac{d\hat{\rho}^2(t)}{dt} = 2tr\,\hat{\rho}(t)\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} =$$

$$= -\frac{2i}{\hbar} tr\,\hat{\rho}(t)\left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)\right] =$$

$$= \frac{2i}{\hbar} tr\,\hat{\rho}(t)\left[\hat{\rho}(t), \hat{H}(t)\right] =$$

$$= \frac{2i}{\hbar}\left\{tr\,\hat{\rho}^2(t)\hat{H}(t) - tr\,\hat{\rho}(t)\hat{H}(t)\hat{\rho}(t)\right\}$$

$$= \frac{2i}{\hbar}\left\{tr\,\hat{\rho}^2(t)\hat{H}(t) - tr\,\hat{\rho}^2(t)\hat{H}(t)\right\}$$

$$= 0$$

$tr\,\hat{\rho}^2(t) = C$, а пошто $tr\,\hat{\rho}^2(t_0) = 1$

$C = 1$

$$tr\,\hat{\rho}^2(t) = tr\,\hat{\rho}^2(t_0) = 1$$

$$\mathrm{tr}\,\hat{\rho}^2(t) = \mathrm{tr}\left(\hat{\rho}(t)\,\hat{\rho}(t)\right) = \mathrm{tr}\left(\hat{U}\,\hat{\rho}(t_0)\underbrace{\hat{U}^{-1}\hat{U}}_{\hat{I}}\hat{\rho}(t_0)\,\hat{U}^{-1}\right.$$

$$= \mathrm{tr}\left(\hat{U}\,\hat{\rho}^2(t_0)\,\hat{U}^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(\underbrace{\hat{U}^{-1}\hat{U}}_{\hat{I}}\,\hat{\rho}^2(t_0)\right) =$$

$$= \mathrm{tr}\,\hat{\rho}^2(t_0)$$

— КАРАКТЕР СТАЊА СЕ НИЈЕ ПРОМЕНИО (ПОД УТИЦАЈЕМ УНИТАРНЕ ЕВОЛУЦИЈЕ)

7. Доказати различивост чистих и мешаних стања на ансамблу, указивањем на постојање "интерференционог члана". Мерењем којих опсервабли се овај члан и може уочити?

Нека су дата два стања

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle \quad \text{чисто стање}$$

$$\hat{\rho} = \sum_i |c_i|^2 |i\rangle\langle i| \quad \text{мешано стање}$$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \sum_i c_i |i\rangle \sum_j c_j^* \langle j|$$

$$= \sum_{i,j} c_i c_j^* |i\rangle\langle j| = \sum_{i=j} |c_i|^2 |i\rangle\langle i| + \underbrace{\sum_{i\neq j} c_i c_j^* |i\rangle\langle j|}_{\text{интерференциони члан}}$$

Када су у питању опсервабле за које је базис $\{|i\rangle\}$ својствени базис, вероватноће мерења и средње вредности су исте за оба ансамбла.

Али, ако се мери опсервабла $\hat{B}$, за коју је испуњено $[\hat{B}, \hat{\rho}] \neq 0$, онда се ансамбли могу разликовати.

Средње вредности

$$\langle \hat{B} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle = \sum_{i,j} c_i c_j^* \langle j | \hat{B} | i \rangle$$

$$\langle \hat{B} \rangle_\rho = tr(\hat{B}\hat{\rho}) = \sum_i \langle i | \hat{B}\hat{\rho} | i \rangle =$$

$$\left[\hat{\rho} = \sum_j |c_j|^2 |j\rangle\langle j| \right]$$

$$= \sum_{i,j} \langle i | \hat{B} \sum_j |c_j|^2 |j\rangle\langle j | i \rangle =$$

$$= \sum_{i,j} |c_j|^2 \langle i | \hat{B} | j \rangle \delta_{ij}$$

$$= \sum_i |c_i|^2 \langle i | \hat{B} | i \rangle$$

Дакле, $\langle \hat{B} \rangle_\psi \neq \langle \hat{B} \rangle_\rho$

Али, ако је $\hat{B} | i \rangle = b_i | i \rangle$

$$\langle \hat{B} \rangle_\psi = \sum_i |c_i|^2 b_i$$

$$\langle \hat{B} \rangle_\rho = \sum_i |c_i|^2 b_i$$

8. Мешани ансамбл је сачињен од два чиста подансамбла у међусобно ортогоналним стањима $|1\rangle$ и $|2\rangle$, са статистичким тежинама $1/3$ и $2/3$, редом. Израчунати стандардно одступање за опсерваблу

$$\hat{A} = a_1 |1\rangle\langle 1| + a_2 |2\rangle\langle 2|$$

у овом стању.

$$\Delta \hat{A} = +\sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \operatorname{tr} \hat{A} \hat{\rho}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3} |1\rangle\langle 1| + \frac{2}{3} |2\rangle\langle 2|$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^{2} \langle i | \hat{A} \hat{\rho} | i \rangle = \langle 1 | \hat{A} \hat{\rho} | 1 \rangle + \langle 2 | \hat{A} \hat{\rho} | 2 \rangle$$

А пошто је

$$\hat{A} \hat{\rho} = \frac{1}{3} a_1 |1\rangle\langle 1| + \frac{2}{3} a_2 |2\rangle\langle 2|$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2$$

$$\langle \hat{A}^2 \rangle = \operatorname{tr} \hat{A}^2 \rho$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \langle i | \hat{A}^2 \hat{\rho} | i \rangle = \langle 1 | \hat{A}^2 \hat{\rho} | 1 \rangle + \langle 2 | \hat{A}^2 \hat{\rho} | 2 \rangle$$

$$\hat{A}^2 = a_1^2 |1\rangle\langle 1| + a_2^2 |2\rangle\langle 2|$$ и

$$\hat{A}^2 \hat{\rho} = \frac{a_1^2}{3} |1\rangle\langle 1| + \frac{2a_2^2}{3} |2\rangle\langle 2|$$

ПА ЋЕ ОНДА

$$\langle \hat{A}^2 \rangle = \frac{a_1^2}{3} + \frac{2a_2^2}{3}$$

СТАНДАРДНО ОДСТУПАЊЕ

$$\Delta\hat{A} = \sqrt{\frac{a_1^2}{3} + \frac{2a_2^2}{3} - \frac{1}{9}a_2^2 - \frac{4}{9}a_1a_2 - \frac{4}{9}a_2^2}$$

$$\Delta\hat{A} = \sqrt{\frac{2}{9}a_1^2 + \frac{2}{9}a_2^2 - \frac{4}{9}a_1a_2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}(a_1 - a_2)$$

КОМЕНТАР

$$\Delta\hat{A} = \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2} \longrightarrow$$ СТАНДАРДНО ОДСТУПАЊЕ

$$(\Delta\hat{A})^2 = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2 \longrightarrow$$ ДИСПЕРЗИЈА ИЛИ ВАРИЈАНСА

9. Мешани ансамбл је сачињен од чистих подансамбала у неортогоналним стањима: пројекција спина дуж z осе, $|+\rangle_z$ са вероватноћом 1/4, и пројекције наниже од x осе, $|-\rangle_x$ са вероватноћом 3/4. Наћи спектралну форму одговарајућег мешаног стања. (Све се тиче $\mathcal{B}_z$ репрезентације)

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}|+\rangle_z\langle+| + \frac{3}{4}|-\rangle_x\langle-|$$

$$|+\rangle_z = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}3 & -3\\-3 & 5\end{bmatrix}$$

Св. вредности

$$\boxed{?}\ \checkmark$$

$$\begin{vmatrix}\frac{5}{8}-\lambda & -\frac{3}{8}\\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{8}-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{32}}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{32}}$$

Св. вектори

$$|\lambda_1\rangle = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\1-\sqrt{10}\end{bmatrix} \quad - \lambda_1 \quad |\lambda_1\rangle = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1-\sqrt{10}\\3\end{bmatrix}$$

$$|\lambda_2\rangle = \begin{bmatrix}3\\1+\sqrt{10}\end{bmatrix} \quad - \lambda_2 \quad |\lambda_2\rangle = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1+\sqrt{10}\\3\end{bmatrix}$$

Норме вектора

$$\||\lambda_1\rangle\| = \frac{1}{3}\sqrt{20-2\sqrt{10}}, \quad \||\lambda_2\rangle\| = \frac{1}{3}\sqrt{20+2\sqrt{10}}$$

$\longrightarrow$

10. Да ли матрица

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

одговара чистом или мешаном стању? За ово стање израчунати очекивану вредност опсервабле репрезентоване матрицом

$$\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\rho = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho^2 = \rho \quad ?$$

$$\rho^2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 3i \\ -3i & 2 \end{bmatrix} \neq \rho$$

Матрица ρ одговара мешаном стању.

Нека је

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\langle A \rangle = \operatorname{tr} A\rho = \operatorname{tr} \rho A = \operatorname{tr} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{tr}\begin{bmatrix} \frac{4-i(1-i)}{3} & \frac{2i+1-i}{3} \\ \frac{2(1+i)+0}{3} & \frac{(1+i)i+0}{3} \end{bmatrix} = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} \frac{3-i}{3} & \frac{i+1}{3} \\ \frac{2(1+i)}{3} & \frac{-1+i}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{3}$$

Вежба: За горњу опсерваблу и стање наћи стандардно одступање

11. Написати статистичке операторе за ансамбле описане следећим стањима:

а) $|H\rangle$

б) $x|H\rangle + y|V\rangle$

в) $|H\rangle$ са вероватноћом $1/2$, $|V\rangle$ са вероватноћом $\frac{1}{2}$

г) $|+45°\rangle$ са вероватноћом $1/2$, $|-45°\rangle$ са вероватноћом $1/2$.

д) $(|H\rangle+|V\rangle)/\sqrt{2}$ са вероватноћом $1/2$, $|H\rangle$ са вероватноћом $1/4$, $|V\rangle$ са вероватноћом $1/4$.

$|H\rangle$ и $|V\rangle$ су стања која описују хоризонталну и вертикалну поларизацију ансамбла фотона. Која од горњих стања су чиста? → испит

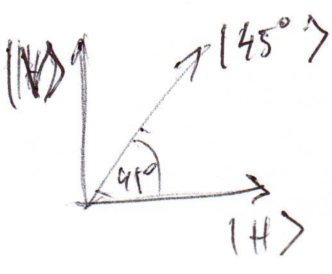
а) $\hat{\rho} = |H\rangle\langle H|$

б) $\hat{\rho} = \left(x|H\rangle + y|V\rangle \right)\left(\langle H| x^* + \langle V| y^* \right)$

$$= |x|^2 |H\rangle\langle H| + xy^* |H\rangle\langle V| + yx^* |V\rangle\langle H| + |y|^2 |V\rangle\langle V|$$

в) $\hat{\rho} = \frac{1}{2} |H\rangle\langle H| + \frac{1}{2} |V\rangle\langle V|$

г)



$$|45°\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle + |V\rangle\right)$$

$$|-45°\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle - |V\rangle\right)$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|45°\rangle\langle 45°| + \frac{1}{2}|-45°\rangle\langle -45°| =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| + \langle V|) +$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle H| - \langle V|) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(|H\rangle\langle H| + \cancel{|H\rangle\langle V|} + \cancel{|V\rangle\langle H|} + |V\rangle\langle V|\right) +$$

$$\frac{1}{4}\left(|H\rangle\langle H\rangle \cancel{-|H\rangle\langle V|} \cancel{-|V\rangle\langle H|} + |V\rangle\langle V|\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{|H\rangle\langle V|} + |V\rangle\langle H|\right) + \frac{1}{4}\hat{I}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\cancel{|H\rangle\langle V|} + |V\rangle\langle H|\right) + \frac{1}{4}\hat{I} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\hat{I}} \qquad \frac{1}{2}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{2}|V\rangle\langle V|$$

g) $\hat{\rho} = \frac{1}{4}(|H\rangle + |V\rangle)(\langle H| + \langle V|) +$

$$\frac{1}{4}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{4}|V\rangle\langle V| =$$

$$= \frac{1}{4}\left(|H\rangle\langle H| + |H\rangle\langle V| + |V\rangle\langle H| + |V\rangle\langle V|\right)$$

$$+ \frac{1}{4}|H\rangle\langle H| + \frac{1}{4}|V\rangle\langle V|$$

$$= \frac{1}{2}\hat{I} + \frac{1}{4}\left(|H\rangle\langle V| + |V\rangle\langle H|\right)$$

За свако од стања испитати

$$\hat\rho^2 = \hat\rho$$

а) Т јер $\hat\rho^2 = |H\rangle\langle H|H\rangle\langle H| = |H\rangle\langle H| = \hat\rho$

б) $\hat\rho^2 = |x|^4 |H\rangle\langle H| + |x|^2 x y^* |H\rangle\langle V|$

$+ |x|^2|y|^2 |H\rangle\langle H| + xy^*|y|^2 |H\rangle\langle V|$

$+ yx^*|x|^2 |V\rangle\langle H| + |x|^2|y|^2 |V\rangle\langle V| +$

$yx^*|y|^2 |V\rangle\langle H| + |y|^4 |V\rangle\langle V|$

$\hat\rho^2 = |x|^4 |H\rangle\langle H| + |x|^2|y|^2 \hat I + xy^* |H\rangle\langle V|$

$+ yx^* |V\rangle\langle H| + |y|^4 |V\rangle\langle V| = \hat\rho$

в) $\hat\rho^2 = \frac{1}{4} |H\rangle\langle H| + \frac{1}{4} |V\rangle\langle V| \neq \hat\rho$

г) $\hat\rho = \frac{1}{2}\hat I \Rightarrow \hat\rho^2 = \frac{1}{4}\hat I \neq \frac{1}{2}\hat I$

д) Домаћи

12. Радећи у формализму канонског ансамбла наћи статистички оператор за електрон који се налази у хомогеном магнетном пољу. У овом стању наћи очекиване вредности свих пројекција спина.

$$\hat{H} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B} \qquad \hat{\vec{\mu}} = \mu_B \hat{\vec{\sigma}}$$

Нека је изабрана z-оса као референтна.

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}}{Z}, \quad Z = \mathrm{tr}\left(e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}}\right)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = -\mu_B \hat{\sigma}_z B_z$$

$$Z = \mathrm{tr}\left(e^{\beta \mu_B \hat{\sigma}_z B_z}\right) = \sum_{i=\uparrow,\downarrow} {}_z\langle i | e^{\beta \mu_B \hat{\sigma}_z B_z} | i \rangle_z$$

$$= {}_z\langle \uparrow | e^{\beta \mu_B \hat{\sigma}_z B_z} | \uparrow \rangle_z + {}_z\langle \downarrow | e^{\beta \mu_B \hat{\sigma}_z B_z} | \downarrow \rangle_z$$

$$= {}_z\langle \uparrow | \uparrow \rangle_z \, e^{\beta \mu_B B_z} + {}_z\langle \downarrow | \downarrow \rangle_z \, e^{-\beta \mu_B B_z}$$

$$Z = e^{\beta \mu_B B_z} + e^{-\beta \mu_B B_z} = 2 \,\mathrm{ch}(\beta \mu_B B_z)$$

У СВ. БАЗИСУ ОПСЕРВАБЛЕ $\hat{\sigma}_z$ (МАТРИЧНО)

$$H = \begin{pmatrix} -\mu_B B_z & 0 \\ 0 & \mu_B B_z \end{pmatrix}$$

$$e^{-\beta H} = \begin{pmatrix} e^{\beta \mu_B B_z} & 0 \\ 0 & e^{-\beta \mu_B B_z} \end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}(\beta \mu_B B_z)} \begin{pmatrix} e^{\beta \mu_B B_z} & 0 \\ 0 & e^{-\beta \mu_B B_z} \end{pmatrix}$$

ОПЕРАТОРСКИ (ОДАВДЕ)

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\mathrm{ch}(\beta \mu_B B_z)} \left(e^{\beta \mu_B B_z} |\uparrow\rangle_z \langle\uparrow| + e^{-\beta \mu_B B_z} |\downarrow\rangle_z \langle\downarrow| \right)$$

$$\hat{\sigma}_z = |\uparrow\rangle_z \langle\uparrow| - |\downarrow\rangle_z \langle\downarrow|$$

$$\hat{\rho}\hat{\sigma}_z = \frac{e^{\beta \mu_B B_z}}{2\mathrm{ch}(\beta \mu_B B_z)} |\uparrow\rangle_z \langle\uparrow| - \frac{e^{-\beta \mu_B B_z}}{2\mathrm{ch}(\beta \mu_B B_z)} |\downarrow\rangle_z \langle\downarrow|$$

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \mathrm{tr}\,(\hat{\rho}\hat{\sigma}_z)$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{ch}(\beta \mu_B B_z)} 2\,\mathrm{sh}(\beta \mu_B B_z)$$

$$= \mathrm{th}\,(\beta \mu_B B_z)$$

За домаћи

$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = ?$ $\qquad \hat{\sigma}_x = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$

$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = ?$ $\qquad \hat{\sigma}_y = -i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|$

Варијација на тему (испит):
Наћи стандардна одступања $\Delta\hat{\sigma}_z$, $\Delta\hat{\sigma}_x$, $\Delta\hat{\sigma}_y$

Питање: Изабрана је оса z. Да ли може нека друга оса? Да ли се могу бирати две осе па да буде:

$$\hat{H} = -\mu_B(\hat{\sigma}_x B_x + \hat{\sigma}_z B_z),$$

на пример?

13. Дефинисати аналогон матрице густине у континуалном базису. Наћи "матрицу густине" ЛХО-а, који се налази у стању $a|0\rangle + b|1\rangle$, у координатном ~~базису~~ репрезентацији.

$$\hat{\rho} = \hat{I}\hat{\rho}\hat{I} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \rho(s,s')\, |s\rangle\langle s'|\, ds\, ds'$$

$$\rho(s,s') = \langle s|\hat{\rho}|s'\rangle$$

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad , \quad \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$\xi = \sqrt{\alpha}\, x$$

$$\rho(\xi,\xi') = \langle \xi|\psi\rangle\langle\psi|\xi'\rangle$$

$$= (a\psi_0(\xi) + b\psi_1(\xi))(a^*\psi_0(\xi') + b^*\psi_1(\xi'))$$

$$= |a|^2\psi_0(\xi)\psi_0(\xi') + ab^*\psi_0(\xi)\psi_1(\xi') +$$

$$+ a^*b\,\psi_0(\xi')\psi_1(\xi) + |b|^2\psi_1(\xi)\psi_1(\xi') =$$

$$\psi_0(\xi) = c_0 e^{-\xi^2/2} H_0(\xi) \quad , \quad H_0(\xi) = 1$$

$$\psi_1(\xi) = c_1 e^{-\xi^2/2} H_1(\xi) \quad , \quad H_1(\xi) = 2\xi$$

$$= |a|^2 c_0 e^{-\xi^2/2} c_0 e^{-\xi'^2/2} + ab^* c_0 e^{-\xi^2/2} 2c_1\xi' e^{-\xi'^2/2}$$

$$+ a^*b\, c_0 e^{-\xi'^2/2} 2c_1\xi e^{-\xi^2/2} + 4|b|^2 c_1^2 e^{-\xi^2/2}\xi\xi' e^{-\xi'^2/2}$$

$$= |a|^2 c_0^2 e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\xi'^2)} + 2c_1 c_0 ab^* \xi' e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\xi'^2)} + 2c_1 c_0 a^* b \xi e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\xi'^2)} + 4|b|^2 c_1^2 \xi\xi' e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\xi'^2)}$$

$$= \left(|a|^2 c_0^2 + 2c_1 c_0 ab^* \xi' + 2c_1 c_0 a^* b \xi + 4|b|^2 c_1^2 \xi\xi'\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\xi'^2)}$$

ПИТАЊЕ! КАКО ИЗГЛЕДА СТАТИСТИЧКИ ОПЕРАТОР САЧИЊЕН ОД ПОДАНСАМБАЛА У СТАЊИМА $|0\rangle$ И $|1\rangle$ СА СТАТИСТИЧКИМ ТЕЖИНАМА a И b, РЕСПЕКТИВНО?

4. Посматрати два ортонормирана вектора $|a\rangle$ и $|b\rangle$. Нека је дат квантни ансамбл Q_1 где је систем са вероватноћом $1/4$ у стању $|a\rangle$ и са вероватноћом $3/4$ у стању $|b\rangle$.

Претпоставимо да је дефинисано следеће

$$|0\rangle = \sqrt{\frac{1}{4}}\,|a\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}}\,|b\rangle$$

$$|1\rangle = \sqrt{\frac{1}{4}}\,|a\rangle - \sqrt{\frac{3}{4}}\,|b\rangle .$$

Посматрати сада квантни ансамбл Q_2 где је систем са вероватноћом $1/2$ у стањима $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Показати да квантни ансамбли Q_1 и Q_2 одговарају једном истом статистичком оператору.

Статистички оператор за ансамбл Q_1 је

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{4}\,|a\rangle\langle a| + \frac{3}{4}\,|b\rangle\langle b| \qquad (*)$$

Статистички оператор за ансамбл Q_2 је

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}\,|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\,|1\rangle\langle 1| \qquad (**)$$

Сада се може показати

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}\,|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\,|1\rangle\langle 1|$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\,|a\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}}\,|b\rangle\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\,\langle a| + \sqrt{\frac{3}{4}}\,\langle b|\right) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\,|a\rangle - \sqrt{\frac{3}{4}}\,|b\rangle\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\,\langle a| - \sqrt{\frac{3}{4}}\,\langle b|\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,|a\rangle\langle a| + \frac{3}{4}\,|b\rangle\langle b| = \hat{\rho}_1$$

Два ансамбла а један статистички оператор.

Пошто је $\langle a|b\rangle = 0$ (*) спектрална декомпозиција

Али (**) није: не важи $\langle 0|1\rangle = 0$

$\hat{\rho}$ — $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, $\{w_i, |\varphi_i\rangle\}$, $\{z_i, |\chi_i\rangle\}$, $\vdots$

$$\begin{cases} |\psi_i\rangle = \hat{U}\,|\varphi_i\rangle \\ |\chi_i\rangle = \hat{U}\,|\varphi_i\rangle \\ |\psi_i\rangle = \hat{U}\,|\chi_i\rangle \\ \vdots \end{cases}$$

Ако је задат ансамбл $\xrightarrow{\text{једнозначно}}$ статистички оператор

Ако је задат стат. опер. $\longrightarrow$ више могућих ансамбала

$\Downarrow$

Неједнозначност ансамбалске интерпретације

Када ће различити ансамбли давати исти статистички оператор? Онда када су одговарајућа стања из мешавина повезани унитарним трансформацијама. (в. горе)